

Formy wieloliniowe

Zad. 1 Niech U, V, W będą przestrzeniami wektorowymi nad ciałem \mathbb{K} i niech

$\Phi: U \times V \rightarrow W$ będzie odwzorowaniem dwuliniowym. Niech
 $F: U \ni u \rightarrow f_u \in \mathcal{L}(V, W)$, gdzie $f_u(v) := \Phi(u, v)$.

Wykazać, że F jest odwzorowaniem liniowym.

Zad. 2 Niech V będzie przestrzenią wektorową nad ciałem \mathbb{R} i niech $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową. Definiujemy

$$\varphi: V \times V \ni (v, w) \rightarrow \frac{1}{4}(f(v+w) - f(v-w)) \in \mathbb{R}.$$

Wykazać, że φ jest formą dwuliniową symetryczną, skojarzoną z f .

Zad. 3 Dana jest forma kwadratowa

$$f: \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \rightarrow x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 \in \mathbb{R}.$$

Znaleźć odwzorowanie dwuliniowe symetryczne skojarzone z f .

Zad. 4 Podane formy dwuliniowe f przedstawić jak sumę formy symetrycznej i antysymetrycznej

a) $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x_1y_1 - 3x_1y_2 - 5x_2y_1 + x_2y_2$

b) $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_3 + 3x_3y_2 + 5x_3y_3$

Zad. 5 Dana jest forma kwadratowa

$$f: \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \rightarrow 2x_1^2 - x_2x_3 + 3x_3^2 \in \mathbb{R}.$$

Wyznaczyć macierz f w bazie kanonicznej oraz rząd f .

Zad. 6 Niech $f: \mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \rightarrow x_1x_2 \in \mathbb{R}$. Wykazać, że f jest formą kwadratową. Wyznaczyć macierz f przy bazie kanonicznej. Znaleźć bazę \mathbb{R}^2 , przy której macierz f ma postać blokową występującą w tezie twierdzenia Sylwestera. Wyznaczyć sygnaturę f .

Zad. 7 Sprowadzić do postaci kanonicznej następujące formy kwadratowe:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2,$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Zad. 8 Dane jest odwzorowanie liniowe

$$f: \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1 - x_2 + 2x_3, -x_1 + 3x_2, 2x_1 - x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Zbadać, czy f jest odwzorowaniem symetrycznym.

Zad. 9 Zbadaj określoność formy kwadratowej

$$F(x, y, z, t) = -x^2 + 4xy - 2xz - 6y^2 + 4yz - 4z^2 + 6zt - 9t^2.$$

Zad. 10 Przekształć formę kwadratową

$$F(x, y, z) = x^2 - 4xy + 2xz + 8yz + 2y^2 - 13z^2$$

do postaci kanonicznej, a następnie zbadaj jej określoność.